2015 年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）

本试卷共 4 页，21 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必用 2B 铅笔在“考生号”处填涂考生号，用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答的答案无效。

4．作答选做题时，请先用 2B 铅笔填涂选做题的题（或题组号）对应的信息点，再作答．漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，满分 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若集合 $M=\{-1,1\},N=\{-2,1,0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{0,-1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{-1,1\}$

【答案】B

2.已知 i 是虚数单位，则复数 $(1+\mathrm{i})^2=$（　　）

A. $2\mathrm{i}$　　B. $-2\mathrm{i}$　　C.2　　D. -2

【答案】A

3.下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是（　　）

A. $y=x+\sin 2x$　　B. $y=x^2-\cos x$　　C. $y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　　D. $y=x^2+\sin x$

【答案】D

4.若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\le 2\\ x+y\ge 0\\ x\le 4\end{cases}$，则 $z=2x+3y$ 的最大值为（　　）

A.2　　B.5　　C.8　　D.10

【答案】B

5.设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a=2,c=2\sqrt{3},\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且$b<c$，则$b=$（　　）

A.3　　B.$2\sqrt{2}$　　C.2　　D.$\sqrt{3}$

【答案】C

6.若直线l_1和l_2是异面直线，l_1在平面α内，l_2在平面β内，l是平面α与平面β的交线，则下列命题正确的是（　　）

A.l与l_1,l_2都不相交　　B.l与l_1,l_2都相交

C.l至多与l_1,l_2中的一条相交　　D.l至少与l_1,l_2中的一条相交

【答案】D

7.已知5件产品中有2件次品，其余为合格品，先从这5件产品中任取2件，恰有一件次品的概率为(　　)

A. 0.4　　B. 0.6　　C. 0.8　　D.1

【答案】B

8.已知椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的左焦点为$F_1(-4,0)$，则$m=$（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.9

【答案】B

9.在平面直角坐标系xOy中，已知四边形$ABCD$是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=(1,-2),\overrightarrow{AD}=(2,1)$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

【答案】A

10.若集合$E=\{(p,q,r,s)|0\le p<s\le 4,0\le q<s\le 4,0\le r<s\le 4\text{且}p,q,r,s\in N\}$，

$F=\{(t,u,v,w)|0\le t<u\le 4,0\le v<w\le 4,\text{且}t,u,v,w\in N\}$,用$\text{card}(X)$表示集合$X$中的元素个数，则

$\text{card}(E)+\text{card}(F)=$（　　）

A.200　　B.150　　C.100　　D.50

【答案】A

二、填空题：本大题共5小题，考生作答4小题，每小题5分，满分20分。

（一）必做题（11～13题）

11.不等式$-x^2-3x+4>0$的解集为____________。(用区间表示)

【答案】$(-4,1)$

12.已知样本数据$x_1,x_2,...,x_n$的均值$\bar{x}=5$，则样本数据$2x_1+1,2x_2+1,...2x_n+1$的均值为____________。

【答案】11

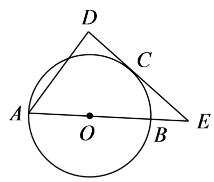
13.若三个正数 a,b,c 成等比数列，其中 $a=5+2\sqrt{6},c=5-2\sqrt{6}$，则 $b=$______________。

【答案】1

（二）选做题（14～15 题，考生只能从中选做一题）

14.（坐标系与参数方程选做题）在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-2$，曲线 C_2 的参数方程为______________。

15.（几何证明选讲做题）如图 I，AB 为圆 O 的直径，E 为 AB 延长线上一点，过 E 作圆 O 的切线，切点为 C，过 A 作直线 EC 的垂线，垂足为 D，若 $AB=4,CE=2\sqrt{3}$,则 $AD=$______________。



【答案】3

三、**解答题：本大题共 6 小题，满分 80 分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤。**

16.（本小题满分 12 分）

已知 $\tan\alpha=2$。（1）求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；（2）求 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$ 的值。

【答案】（1）$\because \tan\alpha=2$，$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2\times1}=-3$

（2）$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\left(2\cos^2\alpha-1\right)-1}$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$

$\because \tan\alpha=2, \therefore \cos\alpha\neq0$

$\therefore$ 原式 $=\frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}=\frac{2\times2}{2^2+2-2}=1$.

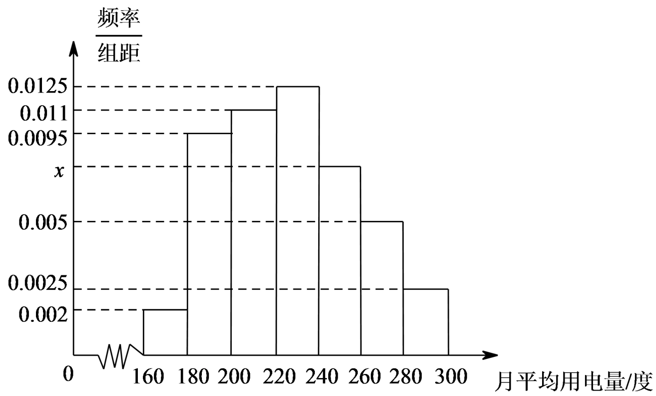
17.（本小题满分 12 分）

某城市 100 户居民的月平均用电量（单位：度），以 $[160,180),[180,200),[200,220),[220,240),[240,260)$，$[260,280),[280,300]$ 分组的频率分布直方图如图 2，

（1）求直方图中 x 的值；

（2）求月平均用电量的众数和中位数；

（3）在月平均用电量为$[220,240),[240,260),[260,280),[280,300]$的四组用户中，用分层抽样的方法抽取 11 户居民，则月平均用电在$[220,240)$的用户中应抽取多少户？



【答案】（1）由题意知：$(0.002+0.0025+0.005+x+0.0095+0.011+0.0125)\times 20=1$

$\therefore x=0.0075$

（2）由题意知：众数：$\dfrac{220+240}{2}=230$；

中位数：$\because [160,180),[180,200),[200,220)$三组所占的频率为$20\times(0.002+0.0095+0.011)=0.45$；

$[240,260),[260,280),[280,300)$三组所占的频率为$20\times(0.0075+0.005+0.0025)=0.3$，

$\therefore m\in[220,240)$ 由中位数的性质知：$0.45+0.0125(m-220)=0.0125(240-m)+0.3$，

$\therefore 2m=448$ 即$m=224$，所以，中位数为 224 。

（3）由题意知，$[220,240),[240,260),[260,280),[280,300)$四组的频率之比为：

$20\times0.0125:20\times0.0075:20\times0.005:20\times0.0025=5:3:2:1$

所以用分层抽样的方法从月平均用电量$[220,240)$的用户中应抽取：$\dfrac{5}{5+3+2+1}\times 11=5$（户）;

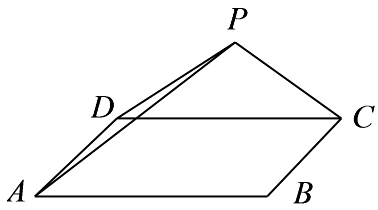
18.（本小题满分 14 分）

如图，三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直，$PD=PC=4$，$AB=6$，$BC=3$.

（1） 证明：$BC//$平面PDA;

（2） 证明：$BC\perp PD$;

（3） 求点C到平面PDA的距离.



【答案】（1）证明：在长方形 $ABCD$ 中

$\because BC//AD, AD\subset 平面PDA, BC\not\subset 平面PDA$

$\therefore BC//平面PDA$

（2）$\because 平面PDA\perp 平面ABCD, BC\perp CD, 平面PDA\cap 平面ABCD=CD, BC\subset 平面ABCD$

$\therefore BC\perp 平面PDA$

$\because PD\subset 平面PDA$

$\therefore BC\perp PD$

（3）设点 C 到平面 PDA 的距离为 h，取 CD 的中点 E，连结 PE

$\because PD=PC, ED=CE$；$\therefore PE\perp CD$

在 $Rt\Delta PEC$ 中，$PC=4, CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 6=3$，

$\therefore PE=\sqrt{PC^2-CE^2}=\sqrt{7}$

由（2）知，$BC\perp 平面PDA$，因为 $AD//BC$，所以，$AD\perp 平面PDA$，

即 AD 为点 A 到平面 PBC 的距离。

$\because V_{C-PDA}=V_{A-PDC}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\Delta PDA}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta PDC}\cdot AD$

即：$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot PD\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}CD\cdot PE\cdot AD$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{7}\cdot 3$

$\therefore h=\frac{3\sqrt{7}}{2}$ 即点 C 到平面 PDA 的距离为 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$。

19.（本小题满分 14 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n, n\in N^*$，已知 $a_1=1, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{5}{4}$，且当 $n\geq 2$ 时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$.

（1）求 a_4 的值；

（2）证明：$\left\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right\}$ 为等比数列；

（3）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】（1）由已知可得，$\therefore S_1=1$，$S_2=\frac{5}{2},S_3=\frac{15}{4}$

当 $n=2$ 时，$4S_4+5S_2=8S_3+S_1$

$\therefore S_4=\frac{37}{8},\therefore a_4=S_4-S_3=\frac{7}{8}$

（2）$\because$ 当 $n\geq 2$ 时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$

$\therefore 4S_{n+2}-4S_{n+1}+5S_n=4S_{n+1}+S_{n-1}.$

$\therefore 4a_{n+2}+5S_n=4S_{n+1}+S_{n-1}.$

$\therefore 4a_{n+2}=4S_{n+1}-4S_n-(S_n-S_{n-1}).$

$\therefore 4a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$

$\therefore 4a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-a_n$

$\therefore 2(a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1})=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$

$\therefore \frac{(a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1})}{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 数列 $\left\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right\}$ 是以1为首项，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

（3）由（2）可得，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore \frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

$\therefore 2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+4$，

$\therefore \left\{2^n a_n\right\}$ 是以 $2^1 a_1=2$ 为首项，公差为 $d=4$ 的等差数列

$\therefore 2^n a_n=4n-2$ 即 $a_n=\frac{n}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{n-1}}$

20. （本小题满分 14 分）

已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1:x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A,B；

（1）求圆 C_1 的圆心坐标；

（2）求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程；

（3）是否存在实数 k，使得直线 $L:y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个交点？若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，说明理由；

【答案】（1）圆 $C_1:x^2+y^2-6x+5=0$ 化为标准形式为 $(x-3)^2+y^2=4$，所以 C_1 的圆心坐标为 $(3,0)$；

（2）设 $M\left(x_0,y_0\right)$ 为轨迹上任一点；

由题意可知过原点的动直线 l 的斜率存在，设为 k_0，则动直线 l 的方程为 $y=k_0x$，即 $k_0x-y=0$；

因为直线 l 与圆 C_1 交于不同的两点，所以圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\left|3k_0\right|}{\sqrt{k_0{}^2+1}}<2$，解得：$k_0{}^2<\dfrac{4}{5}$；

由题意 $k_0=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}=\dfrac{y_0}{x_0}$，

①当 $k_0=0$ 时，M 点的坐标为 $(3,0)$；

②当 $k_0\neq 0$ 时，由圆的性质得：$k_{MC_1}=\dfrac{y_0}{x_0-3}=-\dfrac{1}{k_0}=-\dfrac{x_0}{y_0}$；

化简整理得：$\left(x_0-\dfrac{3}{2}\right)^2+y_0{}^2=\dfrac{9}{4}$；

由 $k_0=\dfrac{y_0}{x_0}$ 得 $y_0=k_0x_0$，所以 $\left(x_0-\dfrac{3}{2}\right)^2+k_0{}^2x_0{}^2=\dfrac{9}{4}$，即 $x_0=\dfrac{3}{k_0{}^2+1}>\dfrac{3}{\dfrac{4}{5}+1}=\dfrac{5}{3}$；

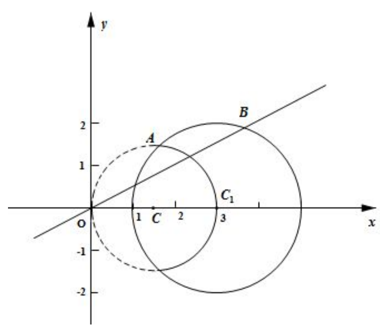
综上，所以 M 的轨迹 C 的方程为 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}\left(x>\dfrac{5}{3}\right)$；

（3）假设存在这样的实数 k；

直线 $L:y=k(x-4)$ 过定点 $D(4,0)$；

令 $x=\dfrac{5}{3}$ 可得 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，设 C 最左端的两个端点（不含）分别为 $E\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 和 $F\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$；

$k_{DE}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{5}{3}-4}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{7}$，$k_{DF}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{5}{3}-4}=\dfrac{2\sqrt{5}}{7}$；



当 L 与 C 相切时，$L:y=k(x-4)$ 可化为 $kx-y-4k=0$，

所以 $d=\dfrac{\left|\dfrac{3}{2}k-4k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{3}{2}$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{4}$；

所以 k 的取值范围是 $k\in\left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]\cup\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}$；

21.（本小题满分 14 分）

设 a 为实数，函数 $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$.

（1） 若 $f(0)\le 1$,求a 的取值范围；

（2） 讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3） 当 $a\ge 2$ 时，讨论$f(x)+\frac{4}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的零点个数。

【答案】（1） $f(0)=a^2+|a|-a(a-1)=|a|+a$.

当 $a\le 0$ 时，$f(0)=0\le 1$ 对于任意的 $a\le 0$ 恒成立；

当 $a>0$ 时，$f(0)=2a$，令 $2a\le 1$，解得 $0<a\le\frac{1}{2}$.

综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

（2）函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数 R.

去绝对值，得 $f(x)=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+2a & x\le a\\ x^2-(2a-1)x & x>a\end{cases}$，

求导，得：$f'(x)=\begin{cases}2x-(2a+1) & x\le a\\ 2x-(2a-1) & x>a\end{cases}$.

当 $x\le a$ 时，$f'(x)=2x-(2a+1)=2(x-a)-1<0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty，a)$ 上单调递减；

当 $x>a$ 时，$f'(x)=2x-(2a-1)=2(x-a)+1>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

（3）令 $h(x)=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+2a+\frac{4}{x} & 0<x\le a\\ x^2-(2a-1)x+\frac{4}{x} & x>a\end{cases}$ $(a\ge 2)$.求导，

得：$h'(x)=\begin{cases}2x-(2a+1)-\dfrac{4}{x^2} & 0<x\le a\\ 2x-(2a-1)-\dfrac{4}{x^2} & x>a\end{cases}$

当 $0<x\le a$ 时，$h'(x)=2x-(2a+1)-\dfrac{4}{x^2}=2(x-a)-1-\dfrac{4}{x^2}<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,\ a)$ 上单调递减；

$x>a$ 时，因为 $a\ge 2$，所以 $x>2$，即 $0<\dfrac{4}{x^2}<1$，

所以 $h'(x)=2(x-a)+\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)>0$，

即 $h(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(1)=4>0,\ h(2a)=2a+\dfrac{2}{a}>0$，

1）若 $a=2$，则 $h(a)=-a^2+a+\dfrac{4}{a}=-4+2+2=0$，

此时 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一一个零点；

2）若 $a>2$，则 $h(a)=-a^2+a+\dfrac{4}{a}=\dfrac{a^3-a^2-4}{a}=\dfrac{a^2(a-1)-4}{a}<0$，

此时 $h(x)$ 在区间 $(0,\ a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上各有一个零点，共两个零点.综上.