绝密★启封并使用完毕前

试题类型：A

2016 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1.本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷 **1** 至 **3** 页，第Ⅱ卷 **3** 至 **5** 页。

2.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。

3.全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

4.考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\,|\,2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$(-3,-\frac{3}{2})$　　（B）$(-3,\frac{3}{2})$　　（C）$(1,\frac{3}{2})$　　（D）$(\frac{3}{2},3)$

（2）设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$，其中 x，y 是实数，则 $|x+y\mathrm{i}|=$

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，则 $a_{100}=$

（A）100　　（B）99　　（C）98　　（D）97

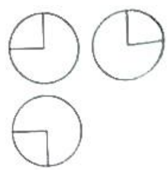
（4）某公司的班车在 7:30，8:00，8:30 发车，小明在 7:50 至 8:30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（5）已知 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 方程表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，则 n 的取值范围是

（A）$(-1,3)$　　（B）$(-1,\sqrt{3})$　　（C）$(0,3)$　　（D）$(0,\sqrt{3})$

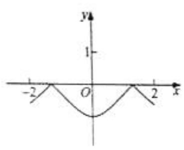
（6）如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径。若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是



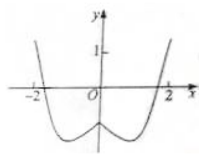
（A）17π　　（B）18π　　（C）20π　　（D）28π

（7）函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为

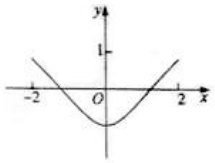
（A）



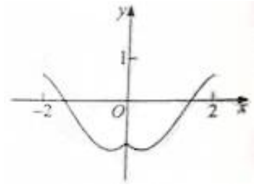
（B）



（C）



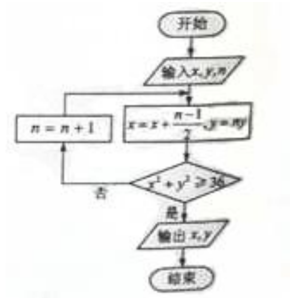
（D）



（8）若 $a>b>1, 0<c<1$，则

（A） $a^c<b^c$ （B） $ab^c<ba^c$

（C） $a\log_b c<b\log_a c$ （D） $\log_a c<\log_b c$



（9）执行右面的程序图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$，则输出 x，y 的值满足

（A） $y=2x$ （B） $y=3x$ （C） $y=4x$ （D） $y=5x$

（10）以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 D、E 两点。已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为

（A）2 （B）4 （C）6 （D）8

（11）平面 a 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，a//平面 CB_1D_1，$a\cap$平面 $ABCD=m$，$a\cap$平面 $ABA_1B_1=n$，则 m、n 所成角的正弦值为

（A） $\frac{\sqrt{3}}{2}$ （B） $\frac{\sqrt{2}}{2}$ （C） $\frac{\sqrt{3}}{3}$ （D） $\frac{1}{3}$

（12）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}), x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为

（A）11 （B）9 （C）7 （D）5

第 **II** 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第（13）题~第（21）题为必考题，每个试题考生都必须作答。第（22）题~第（24）题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分

（13）设向量 $\boldsymbol{a}$=（m，1），$\boldsymbol{b}$=（1，2），且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则 m=______________。

（14）$(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中，x^3 的系数是____________。（用数字填写答案）

（15）设等比数列 a_n 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\ldots a_n$ 的最大值为_______。

（16）某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料。生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元。该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为____________元。

三. 解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分为 12 分）

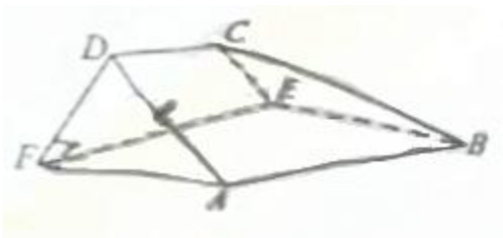
$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c.$

（I）求 C；

（II）若 $c=\sqrt{7}$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长。

（18）（本题满分为 12 分）

如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，AF=2FD，$\angle AFD=90^\circ$，且二面角 D-AF-E 与二面角 C-BE-F 都是 60°。

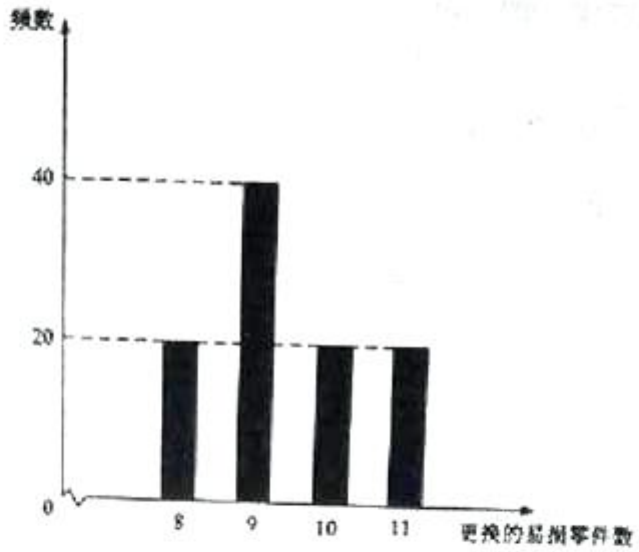


（I）证明平面 $ABEF\perp EFDC$；

（II）求二面角 E-BC-A 的余弦值。

（19）（本小题满分 12 分）

某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰。机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元。在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元。现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数。

（I）求 X 的分布列；

（II）若要求 $P(X \le n) \ge 0.5$，确定 n 的最小值；

（III）以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

20. （本小题满分 12 分）

设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 B（1，0）且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C，D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

（I）证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

（II）设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M，N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P，Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点。

（I）求 a 的取值范围；

（II）设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_2+x_2<2$。

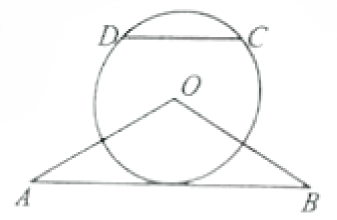
请考生在 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请写清题号

（22）（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，△*OAB* 是等腰三角形，∠*AOB*=120°。以⊙*O* 为圆心，$\frac{1}{2}$ *OA* 为半径作圆。

（I）证明：直线 *AB* 与 *O* 相切；

（II）点 *C*，*D* 在⊙*O* 上，且 *A*，*B*，*C*，*D* 四点共圆，证明：*AB*∥*CD*。



（23）（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直线坐标 *xOy* 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = 1 + a\sin t, \end{cases}$（*t* 为参数，*a*＞0）。在以坐标原点为极点，*x* 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=\cos\theta$。

（I）说明 C_1 是哪种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

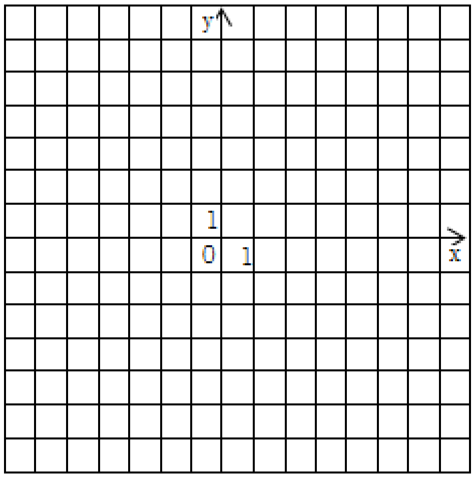
（II）直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = a_0$，其中 a_0 满足 $\tan a_0 = 2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 *a*。

（24）（本小题满分 10 分），选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - |2x-3|$。

（I）在答题卡第（24）题图中画出 $y=f(x)$ 的图像；

（II）求不等式 $|f(x)| > 1$ 的解集。



理数答案

一、选择题

1、D

2、B

3、C

4、B

5、A

6、A

7、D

8、C

9、C

10、B

11、A

12、B

二、填空题

13、 -2

14、 10

15、 64

16、 135000

三、解答题

（17）（Ⅰ）

解： $2\cos C(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$

$2\cos c\cdot\sin(A+B)=\sin C$

$2\cos C\cdot\sin C=\sin C$

$\cos C=\dfrac{1}{2}$

C＝600

（Ⅱ）

解： $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$ab=6$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$c^2=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$

$\therefore a+b=5$

∴周长为$5+\sqrt{7}$

（18）（Ⅰ）

解：∵ABEF 为正方形，∴AF⊥EF。又∵∠AFD＝90°∴AF⊥DF。∵EF∩DF＝F。∴AF⊥面 DFEC

又∵AF⊂面 ABEF，∴面 ABEF⊥面 EFDC

（Ⅱ）由（Ⅰ）知∠DFE 与∠CEF 分别为 D-AF-E 与 C-BE-F 的二面角。即 60°

设 DF＝1。则 AF＝2。DC＝1。

E（0，$-\frac{3}{2}$，0）　B（$2,-\frac{3}{2},0$）　C（$0,-1,\frac{\sqrt{3}}{2}$）　A（$2,\frac{1}{2},0$）

面 EBC 法向量 $\vec{m}=(0,-\sqrt{3},1)$。面 ABC 法向量 $\vec{n}_2=(\sqrt{3},0,4)$　∴ $\cos\theta=\frac{2}{7}\sqrt{7}$

（19）（1）由题意，有

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$；　$P(X=17)=0.4\times0.4=0.16$

$P(X=18)=0.2\times0.2\times2+0.4\times0.4=0.24$；　$P(X=19)=0.2\times0.2\times2+0.4\times0.2\times2=0.24$

$P(X=20)=0.2\times0.4\times2+0.2\times0.2=0.2$

$P(X=21)=0.2\times0.2\times2==0.08$　$P(X=22)=0.2\times0.2=0.04$

从而，得到 X 的分布列如下：

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

（2）由 $P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)=0.44$

$P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)=0.68$

知 $P(X\le n)\ge0.5$ 得 $n\ge19$，所以 n 的最小值为 19

（3）当 $n=19$ 时，$E_1=19\times200+500\times0.2+500\times2\times0.08+500\times3\times0.04=4040$(元)

当 $n=20$ 时　$E_2=20\times200+500\times0.08+500\times2\times0.04=4080$(元)

由 $E_1<E_2$ 知选 $n=19$

（20）（Ⅰ）

解：$(x+1)^2+y^2=16$

∵∠ACD＝∠ADB

又∵BE∥AC

∴∠DBE＝∠ACD

∴∠EBD＝∠BDE

∴EB＝ED

∴EA＋EB＝EA＋ED＝r＝4＝定值

∴点 E 的轨迹构成一个椭圆，2a＝4，a＝2，c＝1，b＝$\sqrt{3}$

∴$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（Ⅱ）若斜率不存在（略）

若斜率存在 l：y＝k（x－1）、　　l'：$y=-\frac{1}{k}(x-1)$

∴$|MN|=\frac{12\sqrt{(1+k^2)(k^2+1)}}{3+4k^2}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$

$|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2+3}}{\sqrt{k^2+1}}$

∴$S=\frac{1}{2}MN\cdot PQ$

$S=\frac{24\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3+4k^2}}$

$12<S\le 8\sqrt{3}$

（21）

（1）解：由 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点得 $f(x)=0\Rightarrow(x-2)e^x+a(x-1)^2=0$

显然 $x=1$ 不为方程的零点

∴$a=\frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}$

令 $g(x)=\frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}$

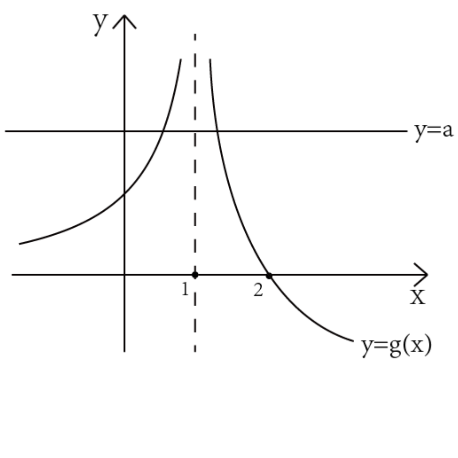
求导，有 $g'(x)=\frac{e^x(1-x)(x^2-4x+5)}{(x-1)^4}$

令 $g'(x)>0\Rightarrow x<1$

令 $g'(x)<0\Rightarrow x>1$

∴$g(x)$ 在（$-\infty$，1）上单调递增，在（1，$+\infty$）上单调递减

作出草图如图所示，



∴由题意有 $a>0$ 时，

$f(x)$ 有 2 个零点

（2）解：不妨设 $x_1<1<x_2$，则要证 $x_1+x_2<2$，

即证 $x_1<2-x_2<1$，

由（1）可知 $g(x)$ 在（$-\infty$,1）单调递增，

∴$g(x_1)<g(2-x_2)$ 又 $g(x_1)=g(x_2)$

$\therefore g(x_2)<g(2-x_2)$，

构造 $h(x)=g(x)-g(2-x)$，则需证明当 $x>1$时，$h(x)<0$，

$\therefore h(x)=\dfrac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}-\dfrac{x\cdot e^2-x}{(1-x)^2}<0$，

即 $x>1$时，$(2-x)e^x-x\cdot e^{2-x}<0$，

令 $m(x)=(2-x)e^x-x\cdot e^{2-x}$，有 $m'(x)=(1-x)(e^x-e^{2-x})$，

当 x>1 时，显然 $m'(x)<0$，
$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，
$\therefore m(x)<m(1)=0$ 命题得证。
选做题：
（23）

（Ⅰ）由 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}\Rightarrow x^2+(y-1)^2=a^2$，显然 C_1 为圆心为（0，1），半径为 a 的圆，

化简得 $x^2+y^2-2y+1-a^2=0$，即 $p^2-2p\sin\theta+1-a^2=0$

（Ⅱ）由 $C_2:p=4\cos\theta\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4$，

联立 $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=a^2\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow y=2x+\dfrac{a^2-1}{2}$（公共弦方程）

又 $C_3:\theta=a_0\Rightarrow y=\tan a_0x=2x$，

从而有 $\dfrac{a^2-1}{2}=0$ 得 $a=\pm1$，
又 a>0，
∴a＝1。