2016 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

一、选择题

1、设集合 $A=\{1,3,5,7\}$， $B=\{x\,|\,2\le x\le 5\}$，则 $A\cap B=$（　）

A、$\{1,3\}$　　B、$\{3,5\}$　　C、$\{5,7\}$　　D、$\{1,7\}$

2、设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 $a=$（　）

A、-3　　B、-2　　C、2　　D、3

3、为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是（　）

A、$\frac{1}{3}$　　B、$\frac{1}{2}$　　C、$\frac{2}{3}$　　D、$\frac{5}{6}$

4、ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a=\sqrt{5},c=2,\cos A=\frac{2}{3}$，则 $b=$（　）

A、$\sqrt{2}$　　B、$\sqrt{3}$　　C、2　　D、1

5、直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　）

A、$\frac{1}{3}$　　B、$\frac{1}{2}$　　C、$\frac{2}{3}$　　D、$\frac{3}{4}$

6、将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期，所得对应的函数为（　）

A、$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B、$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C、$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D、$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

7、如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径。若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　）

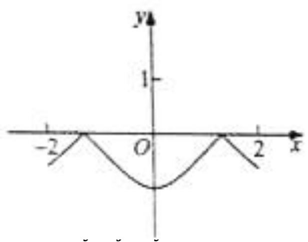
A、17π　　B、18π　　C、20π　　D、28π

8、若 $a>b>0,0<c<1$，则（　）

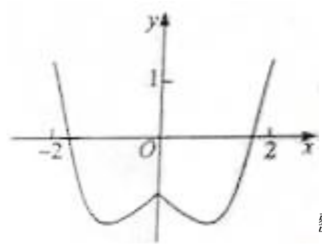
A、$\log_a c<\log_b c$　　B、$\log_c a<\log_c b$　　C、$a^c<b^c$　　D、$c^a>c^b$

9、函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为（　）

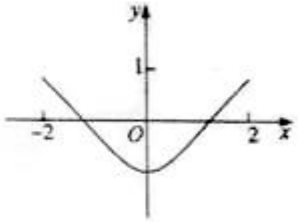
A、



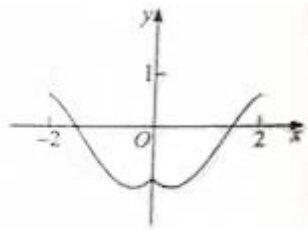
B、

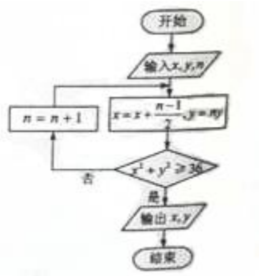


C、



D、





10、执行右边的程序框图，如果输入的 $x=0, y=1, n=1$，则输出 x, y 的值满足（　）

A、 $y=2x$　　B、 $y=3x$　　C、 $y=4x$　　D、 $y=5x$

11、平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，$\alpha //$ 平面 CB_1D_1，$\alpha \cap$ 平面 $ABCD=m$，$\alpha \cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$，则 m,n 所成角的正弦值为（　）

A、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D、 $\frac{1}{3}$

12、若函数 $f\left(x\right)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A、 $\left[-1,1\right]$　　B、 $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$　　C、 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D、 $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

二、填空题

13、设向量 $\vec{a}=\left(x,x+1\right),\vec{b}=(1,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$________。

14、已知 θ 是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$__________；

15、设直线 $y=x+2a$ 与圆 $C:x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A,B 两点，若 $\left|AB\right|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为____________；

16、某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料。生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg,乙材料 1kg，用时 5 个小时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元。该企业现有甲材料 150kg，乙材料 900kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为_______元。

三、解答题

17、已知 $\left\{a_n\right\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_1=1,b_2=\frac{1}{3},a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$。

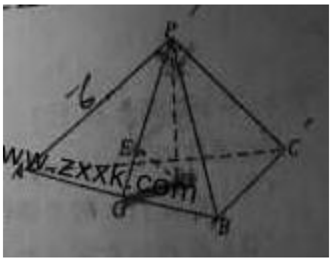
（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式;

（2）求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和。

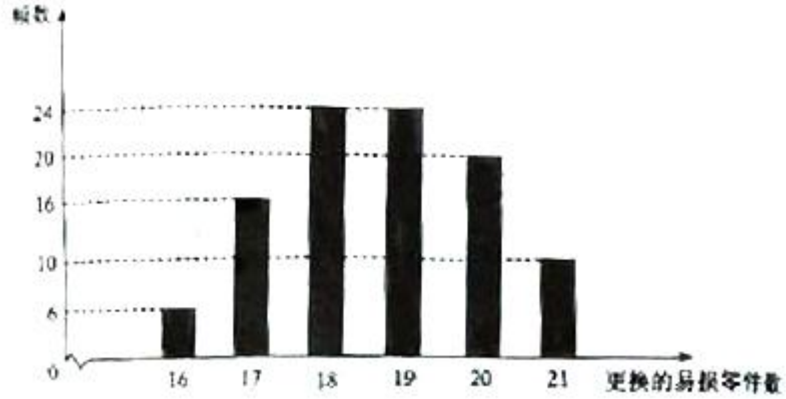
18、如图，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形，$PA=6$，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G。

（1）证明：G 是 AB 的中点；

（2）在答题卡第（18）题图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由），并求四面体 $PDEF$ 的体积。



19、某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰。机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元。在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元。现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



记 x 表示1台机器在三年使用期内需要更换的易损零件数，y 表示1台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），n 表示购机的同时购买的易损零件数。

（1）若 $n=19$，求 y 与 x 的函数解析式；

（2）若要求需更换的易损零件数不大于 n 的频率不小于 0.5，求 n 的最小值；

（3）假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件？

20、在直角坐标系 xoy 中，直线 l： $y=t\left(t\neq 0\right)$ 交 y 轴于点 M ，交抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 于点 P ， M 关于点 P 的对称点为 N ，连结 ON 并延长交 C 于点 H 。

（1）求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$；

（2）除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其他公共点？说明理由。

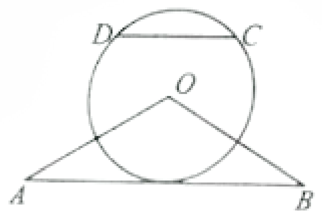
21、已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+a\left(x-1\right)^2$ 。

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

22、选修 4-1：几何证明选讲

如图，ΔOAB 是等腰三角形，$\angle AOB = 120^{\circ}$，以 O 为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆。



（1）证明：直线 AB 与圆 O 相切；

（2）点 C, D 在圆 O 上，且 A, B, C, D 四点共圆，证明：$AB // CD$

23、选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系中 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = 1 + a\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数，$a > 0$）。在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2 : \rho = 4\cos\theta$

（1）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程

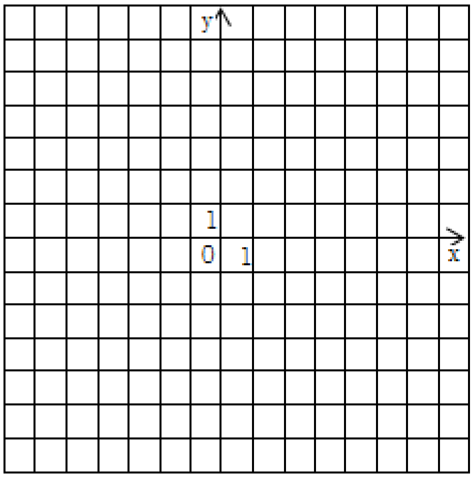
（2）直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0 = 2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_1 上，求 a。

24、选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-1\right|-\left|2x-3\right|$。

（1）画出 $y=f\left(x\right)$ 的图像；

（2）求不等式 $\left|f\left(x\right)\right|>1$ 的解集。



文数答案

一、选择题

1. B
2. A
3.C
4. D
5. B
6. C
7. A
8. B
9. D
10. C
11. A
12. C

二、填空题

13. $-\frac{2}{3}$

14. $-\frac{4}{3}$

15. 4π

16. 216000

三、解答题

17.

解：①令 $n=1$，有 $a_1b_2+b_2=b_1$， 代入 b_1， b_2 得， $a_1=2$

$\because d=3$， $\therefore a_n=3n-1$

②$\because a_n=3n-1$ ，又$\because a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$　　$\therefore$数列$\{b_n\}$等比，首项$b_1=1$，公比$q=\frac{1}{3}$

$\therefore b_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 即 $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n=\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}$　　$\therefore S_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

18.（1）证明：∵PD⊥面 ABC，∴PD⊥AB，

∵DE⊥面 PAB，∴DE⊥AB，

又∵PD∩DE＝D，∴AB⊥平面 PGD，

∴PG⊥AB，∵正三棱锥 P-ABC 中，

PA＝PB，∴G 为 AD 中点

（2）证三棱锥 P-ABC 中，PA＝PB＝PC，

∵各侧面为直角三角形，

∴PA±PB，PB⊥PC，PC⊥PA，

∴PB⊥平面 PAC，

作 EF∥PB 交 PA 于 F，

则 EF⊥面 PAC，∴F 为 E 在平面 PAC 内正投影，

正三棱锥 P-ABC 中，D 为三角形 ABC 的重心，PA＝6，

$\therefore AB=6\sqrt{2}$，$\therefore DG=\sqrt{6}, PG=3\sqrt{2}$，$\therefore PD=\sqrt{PG^2-GD^2}=\sqrt{18-6}=2\sqrt{3}$，

Rt△PGD 中由射影定理 $PD=PE=PG$，$\therefore PE=2\sqrt{2}$，

∵△PAB 为等腰直角三角形，EF⊥PA，∴EF＝PF＝ $2\sqrt{2}\times 2\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，

$\because S_{\triangle}PEF=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，D-PEF 的高为 DE，

Rt△PDG 中，$DE=\frac{PD\cdot DG}{PG}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=2$

∴四面体 PDEF 体积 $V_D-PEF=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle}PEF\times DE=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$

19. 解：①$\therefore y=\begin{cases}3800 & (0\le x\le 19, x\in Z)\\ 500x-5700 & (x\ge 19, x\in Z)\end{cases}$

②由柱状图知，三年内零件更换个数有可能为 16、17、18、19、20、21 总数为 100 个，概率分别为

$p(\varepsilon=16)=\frac{6}{100}=0.06$　　$p(\varepsilon=17)=\frac{16}{100}=0.16$

$p(\varepsilon=18)=\frac{24}{100}=0.24$　　$p(\varepsilon=19)=\frac{24}{100}=0.24$

$p(\varepsilon=20)=\frac{20}{100}=0.2$　　$p(\varepsilon=21)=\frac{10}{100}=0.1$

发现 $p(\varepsilon=16)+p(\varepsilon=17)+p(\varepsilon=18)+p(\varepsilon=19)\rangle 0.5$　$\therefore n=19$

③若购买 19 只，费用为 $y_1=(100\times 19\times 200+20\times 500+10\times 2\times 500)\div 100=4000$ 元

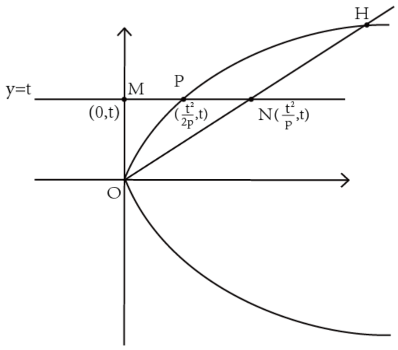
若购买 20 只，费用为 $y_2=(100\times 20\times 200+10\times 1\times 500)\div 100=4050$ 元

故购买 19 台划算

20.

解：

（1）如图所示，$M\left(0,t\right)$ 代入得 $p\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$， $N\left(\dfrac{t^2}{p},t\right)$



$\therefore K_{ON}=\dfrac{op}{t}$ $\quad\therefore l_{op}:y=\dfrac{op}{t}x$

联立 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=\dfrac{op}{t}x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{2t^2}{p}\\ y=2t\end{cases}$

$\therefore M\left(\dfrac{2t^2}{p},2t\right)$ $\quad\therefore \dfrac{|OH|}{|ON|}=\dfrac{y_H}{y_N}=\dfrac{2t}{t}=\dfrac{2}{1}$

（2）$M\left(0,t\right)$， $H\left(\dfrac{2t^2}{p},2t\right)$

$\therefore K_{MH}=\dfrac{p}{2t}$ $\quad\therefore l_{MH}:y=\dfrac{p}{2t}x=t$

联立 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=\dfrac{p}{2t}x+t\end{cases}$ 得 $p^2x^2-4pt^2x+4t^4=0$

$\therefore\left(px-2t^2\right)^2=0$ $\;\therefore px=2t^2$ ， $x=\dfrac{2t^2}{p}$ 唯一解

∴没有其他公共点

21.（Ⅰ）解： $f'(x)=e^x+(x-2)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$

①$a\geq 0$时，$e^x+2a>0$ $\quad x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$时 $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增

②$a<0$时，令 $f'(x)=0$，则 $x_1=1$， $x_2=fn(-2a)$，

1，若 $fn(-2a)>1$ 即 $a<-\dfrac{e}{2}$ 时， $x\in(-\infty,1)$ 时 $f'(x)>0$， $x\in(1,\ln(-2a))$ 时 $f'(x)<0$；
$x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增， $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增， 在 $(1,\ln(-2a))$ 上递减；

2，若 $\ln(-2a)=1$ 即 $a=-\dfrac{e}{2}$ 时， $f'(x)=(x-1)(e^x-e)$， $\therefore x\neq 1$时 $f'(x)>0$， $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增；

3，若 $\ln(-2a)<1$ 即 $-\dfrac{e}{2}<a<0$时， $x\in(-\infty,\ln(-\dfrac{a}{2}))$ 时， $f'(x)>0$， $x\in(\ln(-2a),1)$ 时 $f'(x)<0$， $x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$

$\therefore$若$-\frac{e}{2}<a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$上递增，在$(1,+\infty)$上递增；在$(\ln(-\frac{a}{2}),1)$上单调递减。

（Ⅱ）解：由①知，若$a\geq 0$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，$(1,+\infty)$单调递增，且$f(1)=-e<0$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，$\therefore$一定有 2 个零点；

若$a<-\frac{e}{2}$时$f(x)$在（$-\infty,1$）内递增，$(1,\ln(-2a))$内递增，$(\ln(-2a),+\infty)$递增，且$f(1)=-e<0$，$\therefore$ $f(x)$只有一个零点；

若$a=-\frac{e}{2}$时，$f(x)$在 R 上递增，则$f(x)$只有一个零点；

若$0>a>-\frac{e}{2}$时$f(x)$在$(-\infty,\ln(-2a)$增，$(\ln(-2a),1)$减，$(1,+\infty)$增，$\because$ $f(1)=-e<0$，$x-1+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，$x\to-10$时$f(x)\Rightarrow-10$，$\therefore$ $f(x)$在$(1,+\infty)$内只有一个零点，如若恰有 2 个零点，只能使$f(\ln(-2a)=0$

而$[\ln(-2a)-2]\cdot(-2a)+a[\ln(-2a)-1]^2=0$

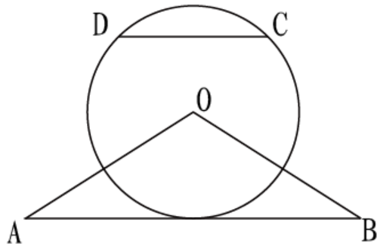
即须$4-\ln(-2a)+[\ln(-2a)-1]^2=0$，$\because$ $-\frac{a}{2}<a<0$，$\therefore$ $\ln(-2a)<1$，

$\therefore$ $4-\ln(-2a)>0$ $[\ln(-2a)-1]^2>0$，$\therefore$不可能为 0，

得上$f(x)$有 2 个零点，a 的范围是$[0,+\infty)$。

22.

解：



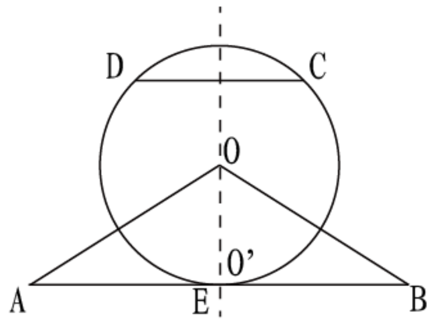
（1）设E是AB的中点，连接OE

$\because$ $OA=OB,\angle AOB=120^\circ$

$\therefore$ $OE\perp AB,\angle AOE=60^\circ$

在$Rt\triangle AOE$中，$OE=\frac{1}{2}AO$,即O到直线AB的距离等于$\odot O$半径，

所以直线AB与$\odot O$相切



（2）因为$OA=2OD$，所以O不是A,B,C,D四点所在圆的圆心。

设O'是A,B,C,D四点所在圆的圆心，作直线OO'。

由已知得O在线段AB的垂直平分线上，

又O'在线段AB的垂直平分线上，

所以$OO'\perp AB$

同理可证$OO'\perp CD$，所以$AB\parallel CD$

23. 解① C_1:$\begin{cases}x=a\cdot\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=a\cos t\\ y-1=a\sin t\end{cases}$ $\Rightarrow x^2+(y-1)^2=a^2$

表示的是圆心在$(0,1)$，半径为$|a|$的圆

转化为极坐标方程是$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$

②$C_1:x^2+(y-1)^2=a^2$　$C_2:(x-2)^2+y^2=4$　$C_3:y=\tan\partial_0\cdot x=2x\quad(x>0)$

C_1与C_2的公共点在直线$y=2x+\dfrac{1-a^2}{2}$上，又在C_3上

说明两直线重合，$\therefore\dfrac{1-a^2}{2}=0$　$\therefore a=\pm1$

24.

解：

（1）$f(x)=|x+1|-|2x-3|=\begin{cases}x-4,x\le-1\\3x-2,-1<x\le\dfrac{3}{2}\\-x+4,x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$，图像如图（略）。

（2）$\because|f(x)|>1$，$\therefore f(x)<-1$或$f(x)>1$。

对于不等式$f(x)<-1$；

①当$x\le-1$时，解不等式$x-4<-1$，解得$x<3$，所以$x\le-1$；

②当$-1<x\le\dfrac{3}{2}$时，解不等式$3x-2<-1$，解得$x<\dfrac{1}{3}$，所以$-1<x<\dfrac{1}{3}$；

③当$x>\dfrac{3}{2}$时，解不等式$-x+4<-1$，解得$x>5$，所以$x>5$。

所以$x<\dfrac{1}{3}$或$x>5$。

对于不等式$f(x)>1$：

①当$x\le-1$时，解不等式$x-4>1$，解得$x>5$，所以无解；

②当$-1<x\le\dfrac{3}{2}$时，解不等式$3x-2>1$，解得$x>1$，所以$1<x\le\dfrac{3}{2}$；

③当$x>\dfrac{3}{2}$时，解不等式$-x+4>1$，解得$x<3$，所以$\dfrac{3}{2}<x<3$。

所以$1<x<3$。

综上所述，不等式$|f(x)|>1$的解集为$\{x\mid x<\dfrac{1}{3}$或$1<x<3$或$x>5\}$。